Université de Abdelmalek Essaadi
FST de Tanger

Module Analyse I
Filière MIPCI - GEGM

Série $N^0 1$

Exercice 1

En utilisant la définition de la limite d'une suite montrer que:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0$. b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2+1} = 2$. c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$.

Exercice 2

Etudier la nature des suites suivantes :

a) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ b) $u_n = \frac{1}{1^1}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{n^n}$ $\forall n \geq 1$. c) $u_n = n - \ln(n!)$.

Exercice 3

On considère la suite récurrente.

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 > 0 \end{cases} \qquad \text{avec} \quad f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$$

1) Etudier f et le signe de $f(x) - x$, en déduire les limites possible de u_n.
2) On suppose que $0 \leq u_0 \leq \frac{1}{4}$.
   Monterer que $0 \leq u_n \leq 1$ et qu'elle est croissante, en déduire sa limite.
3) On suppose $\frac{1}{4} \leq u_0 \leq \frac{3}{4}$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) ?
4) On suppose $u_0 > 3/4$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?

ETUSUP .com

Exercice 4

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .. + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}.$$

a) - Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
b) - En déduire la convergence de v_n.

Exercice 5

Soit u_n la suite réelle définie par la donnée de deux nombre réels u_0, u_1 et par la relation :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$$

1.) Montrer que $|u_{n+2} - u_{n+1}| = \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|$ et par récurrence sur n en déduire que

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \frac{1}{2^{n+1}}|u_1 - u_0|.$$

2.) Montere que u_n est une suite de Cauchy.

Exercice 6

On considére la suite (u_n) déterminée par :$u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N} \;\; u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

a.) Etudier la fonction $f : x \longrightarrow 1 + \frac{1}{x}$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}, u_n$ est déféni et $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

b.) Montrer que : $\forall n \geq 1 \;\; |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{4}{9}|u_n - u_{n-1}|$

c.) Montrer que la fonction fof est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
En déduire que les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont adjacentes ; calculer leur limite commune l.

d.) Montrer qu'on a :$\forall n \geq 1 \;\; |u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|$; quelle valeur suffit-il de donner à l'entier n pour avoir $|u_n - l| \leq \frac{1}{1000}$

$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)|$

$= \left|\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{l}\right)\right| = \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{l - u_n}{u_n l}\right|$

$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$; $\frac{3}{2} \leq l \leq 2 \Rightarrow \frac{9}{4} \leq l \leq 4$, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n l} \leq \frac{4}{9}$

$\Rightarrow |u_{n+1} - l| = \frac{4}{9}|u_n - l|$

ETUSUP .com

Série N°1 09-10

ETUSUP .com

Exercice 1

a/ Montrons que $\lim_{\infty} U_n = 0$; $U_n = \frac{2}{n^2}$

Soit $\varepsilon > 0$? $\exists N \in \mathbb{N}$ / $\forall n > N$: $|U_n - 0| < \varepsilon$

$|U_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{2/\varepsilon}$

il suffit de prendre $N = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right] + 1$

b/ Montrons que $\lim_{\infty} U_n = 2$; $U_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$

$|U_n - 2| = \left|\frac{2n^2+3}{n^2+1} - 2\right| = \left|\frac{2n^2+3-2n^2-2}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}$

pour avoir $|U_n - 2| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$

càd $n^2 - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$; $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$; $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$

On prend $N = \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}\right] + 1$

c/ Montrons que $\lim_{+\infty} U_n = +\infty$ avec $U_n = \sqrt[3]{n}$

Soit $A > 0$? $N > 0$ / $\forall n > N$: $U_n > A$

$U_n > A \Leftrightarrow \sqrt[3]{n} > A \Leftrightarrow n > A^3$; On prend $N = [A^3] + 1$

Exercice 2

a/ $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^1 = e \quad \left(\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\right)$

Donc la suite (U_n) est convergente vers e

b/ $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$ $n \geq 1$

- On a $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante
- $\forall n \geq 2$: $n^n \geq 2^n$ ($\ln n \geq \ln 2 \Rightarrow n \ln n \geq n \ln 2 \Rightarrow \ln n^n \geq \ln 2^n$)

d'où $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$ et par conséquent :

$U_n \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - 1/2} = 1 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 3/2$

car $-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0$

(U_n) est majorée par $3/2$ donc (U_n) est convergente

<u>Exercice 4</u> $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ $\quad V_n = U_n + \frac{1}{n(n!)}$

a/ $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow (U_n)$ croissante

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - U_n - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \Rightarrow (V_n) \text{ decroissante}$$

$V_n - V_n = \frac{1}{n.n!}$ et $\lim_{\infty} (V_n - U_n) = 0$

Ainsi les 2 suite sont adjacentes

b/ les 2 suite (U_n) et (V_n) sont adjacante donc elles convergent vers la même limite l

<u>Exercice 5</u> $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + U_{n-1})$

1/. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$: $|U_{n+2} - U_{n+1}| = \frac{1}{2}|U_{n+1} - U_n|$

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| = \left|\frac{1}{2}(U_{n+1} + U_n) - U_{n+1}\right| = \left|\frac{1}{2}(U_n - U_{n+1})\right| = \frac{1}{2}|U_{n+1} - U_n|$$

- Montrons par recurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}$: $|U_{n+2} - U_{n+1}| = \frac{1}{2^{n+1}}|U_1 - U_0|$
  - Pour $n = 0$ la proposition est verifiée car
    $|U_2 - U_1| = \frac{1}{2}|U_1 - U_0| = \frac{1}{2^{0+1}}|U_1 - U_0|$
  - Supposons $|U_{n+2} - U_{n+1}| = \frac{1}{2^{n+1}}|U_1 - U_0|$ alors
    $|U_{n+3} - U_{n+2}| = \frac{1}{2}|U_{n+2} - U_{n+1}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}|U_1 - U_0| = \frac{1}{2^{n+2}}|U_1 - U_0|$
    la proposition est vraie pour $n+1$

2/ Soient p et q 2 entiers naturels tels que $p > q$ alors

$$|U_p - U_q| = |(U_p - U_{p-1}) + (U_{p-1} - U_{p-2}) + \dots + (U_{q+1} - U_q)|$$
$$\leq |U_p - U_{p-1}| + |U_{p-1} - U_{p-2}| + \dots + |U_{q+1} - U_q|$$
$$\leq \frac{1}{2^{p-1}}|U_1 - U_0| + \frac{1}{2^{p-2}}|U_1 - U_0| + \dots + \frac{1}{2^q}|U_1 - U_0| =$$
$$= \left(\frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^{q+1}} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}}\right)|U_1 - U_0| = \frac{1}{2^q}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-q}}{1 - 1/2}|U_1 - U_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^q\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-q-1}\right)|U_1 - U_0|$$

ETUSUP .com

Exercice 3 $\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 > 0 \end{cases}$ $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$

x	$-\infty$		$1/4$		$3/4$		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1/ • $f(x) - x = x^2 - x + \frac{3}{16}$; $\Delta = \frac{1}{4}$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$

• Si (U_n) converge vers ℓ alors $\ell = f(\ell)$; $f(\ell) - \ell = 0$; $\ell = \frac{1}{4}$ ou $\ell = \frac{3}{4}$

2/ * Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq \frac{1}{4}$ ($\Rightarrow 0 \leq U_n \leq 1$)

• Pour $n = 0$ $0 \leq U_0 \leq 1/4$ evident

• Supp $0 \leq U_n \leq 1/4$ et m-q $0 \leq U_{n+1} \leq 1/4$

on a $0 \leq U_n \leq 1/4$ et f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ ($f'(x) = 2x \geq 0$)

donc $f(0) \leq f(U_n) \leq f(1/4)$ càd $\frac{3}{16} \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{4}$

* $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$

D'après le tableau de signe de $f(x) - x$: on a $0 \leq U_n \leq 1/4 \Rightarrow f(U_n) - U_n \geq 0$

donc $U_{n+1} > U_n$; (U_n) est croissante

• (U_n) est croissante et majorée par $1/4$ donc (U_n) est convergente vers ℓ

f est continue sur $[0, 1/4]$ et $f([0, 1/4]) = [\frac{3}{16}, \frac{1}{4}] \subset [0, 1/4]$

donc ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$ et $0 \leq \ell \leq 1/4 \Rightarrow \ell = \frac{1}{4}$ d'après 1/

3/ M. que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4}$

• $1/4 \leq U_0 \leq 3/4$ evident

• Supp $\frac{1}{4} \leq U_n \leq 3/4$ et m. que $1/4 \leq U_{n+1} \leq 3/4$

on a $1/4 \leq U_n \leq 3/4$ et $f \uparrow$ sur $\mathbb{R}^+ \Rightarrow f(1/4) \leq f(U_n) \leq f(3/4)$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{4}$

• $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \leq 0$ (d'après le tableau de signe de $f(x) - x$)

car $1/4 \leq U_n \leq 3/4$ donc $U_{n+1} < U_n \Rightarrow (U_n)$ decroissante

• (U_n) decroissante, minorée donc convergente vers ℓ

• f continue sur $[1/4, 3/4]$ et $f([1/4, 3/4]) = [1/4, 3/4]$

donc ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$ et $1/4 \leq \ell \leq 3/4 \Rightarrow \ell = 1/4$ ou $\ell = 3/4$

Comme la suite (U_n) est decroissante donc $\ell = 1/4$

4/ M. que $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n > 3/4$

• $U_0 > 3/4$ evident . Supposons $U_n > 3/4$ et m-que $U_{n+1} > 3/4$

... 3/ et f croissante alors $f(U_n) > f(3/4)$ càd

ETUSUP .com

• Nature de (U_n)

(U_n) est croissante et non majorée (car f n'est pas majorée sur $]3/4, +\infty[$)

donc (U_n) est divergente vers $+\infty$

<u>Exercice 6</u> $U_0 = 2$ $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}$ $n \in \mathbb{N}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	
f	1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

a/ $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

• (U_n) est definie $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n \neq 0$

. Pour $n=0$: $U_0 = 2 \neq 0$

. Supposons $U_n \neq 0$ alors $\frac{1}{U_n} \neq 0$ et $1 + \frac{1}{U_n} \neq 1$ $\Rightarrow U_{n+1} \neq 0$ car $1 + \frac{1}{U_n} > 0$

• Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$: $3/2 \leq U_n \leq 2$.

. pour $n=0$ $\frac{3}{2} \leq U_0 \leq 2$ verifiée

. Supp $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$ et m-q : $3/2 \leq U_{n+1} \leq 2$

On a $3/2 \leq U_n \leq 2$ et f est decroissante sur $[3/2, 2]$ alors

$f(2) \leq f(U_n) \leq f(3/2)$ car $\frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{3}$ $\Rightarrow \frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2$ $\left(\frac{5}{3} \leq 2\right)$

b/ $|U_{n+1} - U_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{U_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{U_{n-1}}\right)\right| = \left|\frac{U_{n-1} - U_n}{U_n U_{n-1}}\right| = \frac{1}{U_n} \cdot \frac{1}{U_{n-1}} |U_n - U_{n-1}|$

On a $3/2 \leq U_n \leq 2$ et $3/2 \leq U_{n-1} \leq 2$ $\Rightarrow \frac{9}{4} \leq U_n U_{n-1} \leq 4$ $\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{U_n U_{n-1}} \leq \frac{4}{9}$

d'où $|U_{n+1} - U_n| \leq \frac{4}{9} |U_n - U_{n-1}|$

c/ • f est decroissante sur $]0, +\infty[$ $\Rightarrow$ $f \circ f$ est croissante sur $]0, +\infty[$

$((f \circ f)'(x) = f'(x) \times f'(f(x)) > 0)$

. posons $V_p = U_{2p}$ et $W_p = U_{2p+1}$ alors $V_{p+1} = f \circ f(V_p)$ et $W_{p+1} = f \circ f(W_p)$

• D'après la question a/ $\forall p \in \mathbb{N}$: $3/2 \leq V_p \leq 2$ et $3/2 \leq W_p \leq 2$

• $V_0 = U_0 = 2$; $W_0 = U_1 = \frac{3}{2}$, $V_1 = \frac{5}{3}$; $W_1 = \frac{8}{5}$

• Montrons par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$: $V_p > V_{p+1}$ et $W_p < W_{p+1}$

. pour $p=0$: $V_0 = 2 > V_1 = \frac{5}{3}$; $W_0 = \frac{3}{2} < W_1 = 8/5$

. Supp $V_p > V_{p+1}$ et $W_p < W_{p+1}$. Comme $f \circ f$ est croissante alors

$f \circ f(V_p) > f \circ f(V_{p+1})$ et $f \circ f(W_p) < f \circ f(W_{p+1})$ $\Rightarrow V_{p+1} > V_{p+2}$ et $W_{p+1} < W_{p+2}$

donc (V_p) est décroissante et (W_p) est croissante

• On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$: $|U_{n+1} - U_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |U_1 - U_0|$ d'où

On a : $|W_p - V_p| = |U_{2p+1} - U_{2p}| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{2p} |U_1 - U_0|$ et $\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{2p} |U_1 - U_0| = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} W_p - V_p = 0$

• (U_{2p}) et (U_{2p+1}) sont 2 suite adjacente convergente et sont 2 suite extraite de (U_n) donc

$\lim_{p \to +\infty} U_{2p} = \lim_{p \to +\infty} U_{2p+1} = \lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$ avec $\ell = 1 + \frac{1}{\ell}$ $\Rightarrow \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..